Clase 10 18 Agosto 2014

Título de la nota 18/08/2014

Proceso Adiabático

- sistema cerrado y aislado
- $Q = 0$
- de la primera Ley $\Delta U = Q - W$
- $\Delta U = -W$
- $\Delta H = n\bar{C_p}\Delta T$ gas perfecto $\qquad dH = n\bar{C_p}\,dT$ gas ideal
- p, V, T cambian $\qquad \Delta S = 0$ (reversible)
- $\gamma = \dfrac{\bar{C_p}}{\bar{C_v}}$

$\gamma > 1 \qquad \gamma \neq 0$ y no es negativo

Si p, V, T cambian justificar la gráfica p vs T

de la relación $\Delta U = -w$ para ser expansión $w = (+)$

por lo tanto:

$w = -\Delta U \quad \therefore \quad w = -(-\Delta U)$ debe disminuir energía interna

por lo tanto sí $\Delta U = n\bar{C}_v \Delta T$ $\quad \Delta T < 0$

$T_2 < T_1$

si se realiza una expansión el sistema se enfría ✓

El cambio de volumen es obvio

expansión $V_2 > V_1$

Lo único que debe justificarse es la presión

Como el sistema se enfría por expansión lo más lógico es que la presión disminuya ; por lo tanto

expansión $p_2 < p_1$

de esta forma el gráfico puede obtenerse de 2 formas

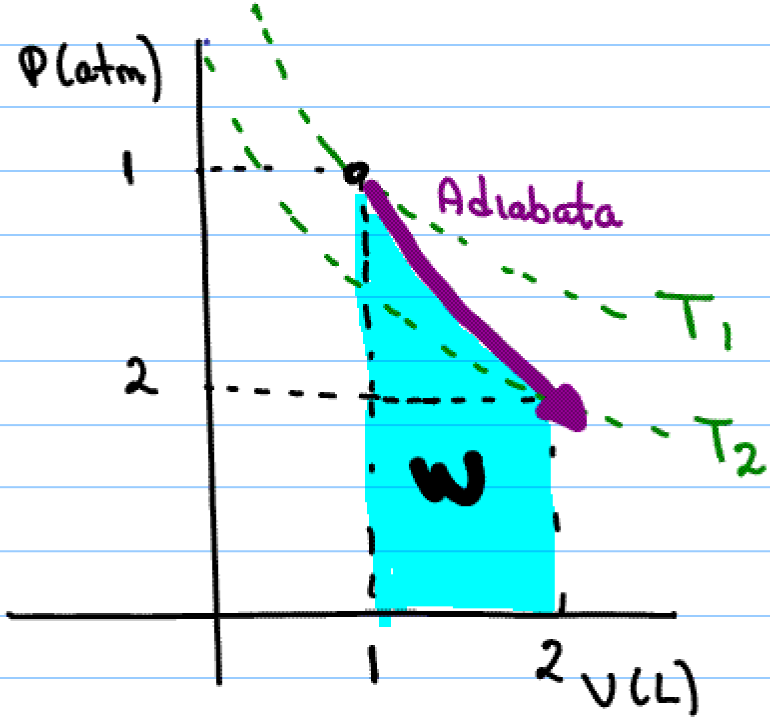
Exp. Adiab. Rev. (multipasos)

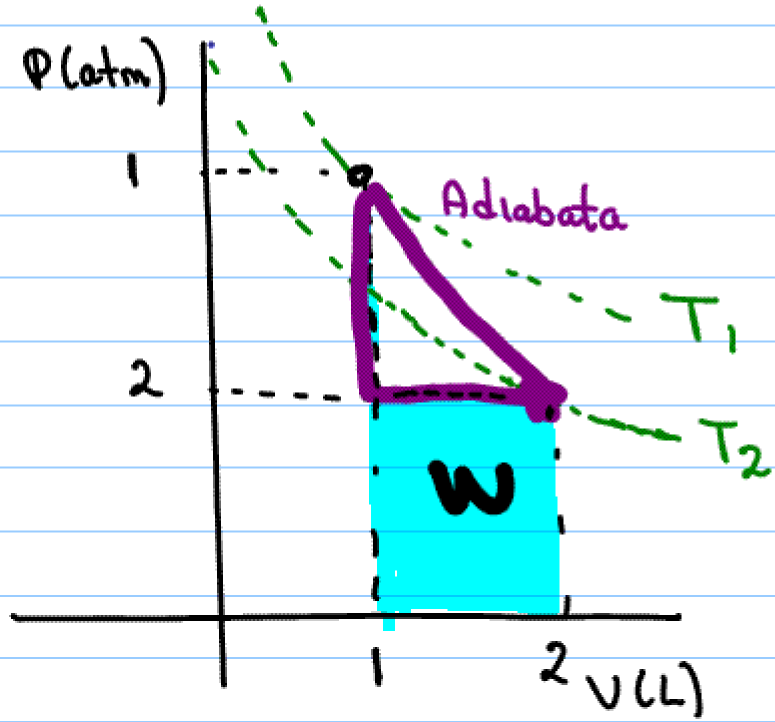
$T_2 < T_1$

$V_2 > V_1$

$P_2 < P_1$

Exp. Adiab. Irrev. (1 solo paso)





Obtención de la relación de variables

Hasta estos momentos todos los procesos se pueden obtener de la siguiente forma:

$$
PV^{x} = cte \begin{cases} x = 0 & \text{isobárico } \checkmark \\ x = 1 & \text{isotérmico } \checkmark \\ x = \infty & \text{isocórico } \checkmark \\ x = \gamma & \text{adiabático } \checkmark \\ x \neq 0, 1, \infty, \gamma & \text{politrópico } \checkmark \end{cases}
$$

por lo tanto si se grafica (aplicando logaritmo)

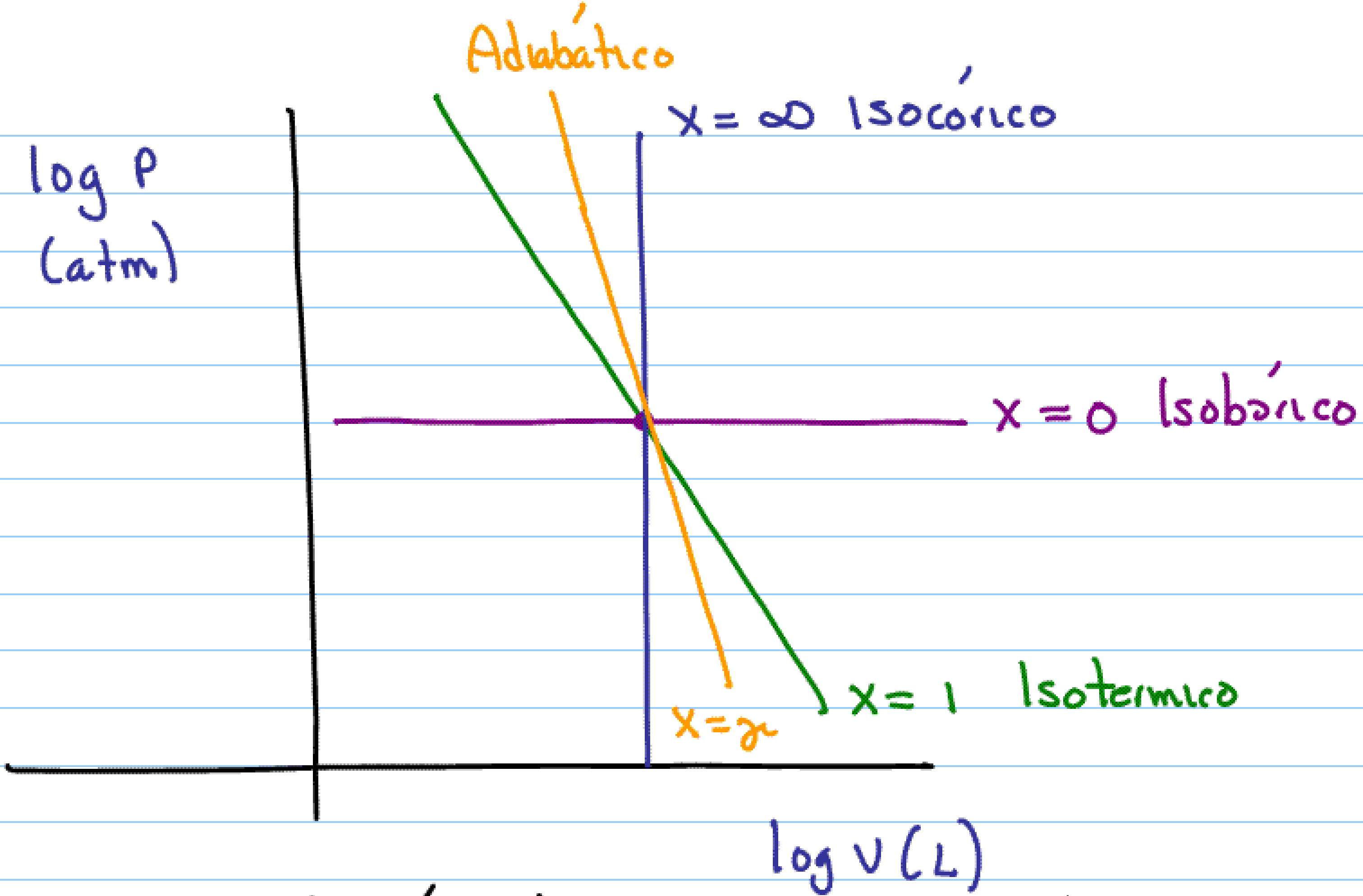
$$(pV^{x} = cte)\ \log$$

$$\log p + x \log V = \log cte$$

$$\log p = \log cte - x \ln V$$

se justifica pendiente negativa

graficando $\log P$ vs $\log V$



Se observa en el gráfico la pendiente negativa y las isobaras, isocoras e isotermas (lineales) ✓

por lo tanto si retomamos

$$pV^{x} = cte \qquad x = \infty$$

en un proceso adiabático reversible

$$\boxed{P_2V_2^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma}}$$

adelante se comprobará esta relación reversible

si se retoma que $\Delta U = -W$ ó $dU = -\delta W$

se puede obtener:

$$dU = -\delta w$$

$$n\bar{C}_v\, dT = -p\,dV$$ si es reversible $p = \frac{nRT}{V}$

$$\cancel{n}\bar{C}_v\, dT = -\left(\frac{\cancel{n}RT}{V}\, dV\right)$$

$$\frac{\bar{C}_v\, dT}{T} = -\left(R\,\frac{dV}{V}\right)$$ si se conoce que $R = \bar{C}_p - \bar{C}_v$

$$\frac{\bar{C}_v\, dT}{T} = -\left[(\bar{C}_p - \bar{C}_v)\,\frac{dV}{V}\right]$$ reacomodando y sabiendo que

$$\gamma = \frac{\bar{C}_p}{\bar{C}_v}$$

$$\frac{dT}{T} = -\left[\left(\frac{\bar{C}_p - \bar{C}_v}{\bar{C}_v}\right)\frac{dV}{V}\right]$$

$$\frac{dT}{T} = -\left[(\gamma - 1)\ \frac{dV}{V}\right]$$ integrando

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\gamma-1)\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \ln\frac{T_2}{T_1} = -(\gamma-1)\ln\frac{V_2}{V_1}$$

invirtiendo el logaritmo en V

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = (\gamma - 1) \ln \frac{V_1}{V_2}$$ aplicando Leyes de logaritmos

$$\ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}$$ con la Funcion inversa

$e \qquad\qquad e$

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}}$$ Exp. Adiab. Rev. ✓

Ejercicio obtener la relación p y V

retomando

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T = \frac{pV}{nR}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{p_2V_2/\cancel{nR}}{p_1V_1/\cancel{nR}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \cancel{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1}} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \cancel{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1}}$$

de esta forma $\boxed{p_2V_2^{\gamma} = p_1V_1^{\gamma}}$ Exp. Adiab. Rev.

Ejercicio obtener la relacion p con T

retomando

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$ sustituyendo $V = \frac{nRT}{P}$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\cancel{nR}T_1/P_1}{\cancel{nR}T_2/P_2}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_1 P_2}{T_2 P_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1}$$ reacomodando

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{-1} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1}$$ reacomodando

$$\cancel{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1}} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} \cancel{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-1}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$ simplificando

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$ Exp. Adiab. Rev